Automates finis

> Pour comprendre cette section, comprendre ce qu'est un diagramme d'état et ce que sont les langages formels est très utile.

Un automate fini est une construction mathématique abstraite représentant une machine ayant plusieurs états et des transitions permettant de passer d'un état à l'autre.

Les mécanismes

Les **mécanismes** sont des machines simples, **sans inputs ni output** et sans lien avec le monde extérieur. Elles ne sont dirigées **que par leur propre horloge interne**. En voici un exemple pour un feu tricolore :

Ils peuvent être décrits par le couple $M = (E, t)$ où E est l'ensemble des états et t la fonction de transition entre les états. Un premier état sera représenté par e et à l'instant suivant passera dans l'état $t(e)$.

Les mécanismes seront toujours une boucle infinie, il n'y a pas de point de départ ni de point d'arrivée. Et si un état n'a des transitions qu'avec lui-même ou à personne, alors on dira que c'est un **état repos**.

etat repos

Automates fini

Les automates finis sont un peu plus complexes que les mécanismes, car ils ont des inputs. Un automate fini est décrit par le triplet $A = (E, \Sigma, t)$ où E est l'ensemble fini et non-vide des états, Σ l'ensemble fini des inputs et t la fonction de transition.

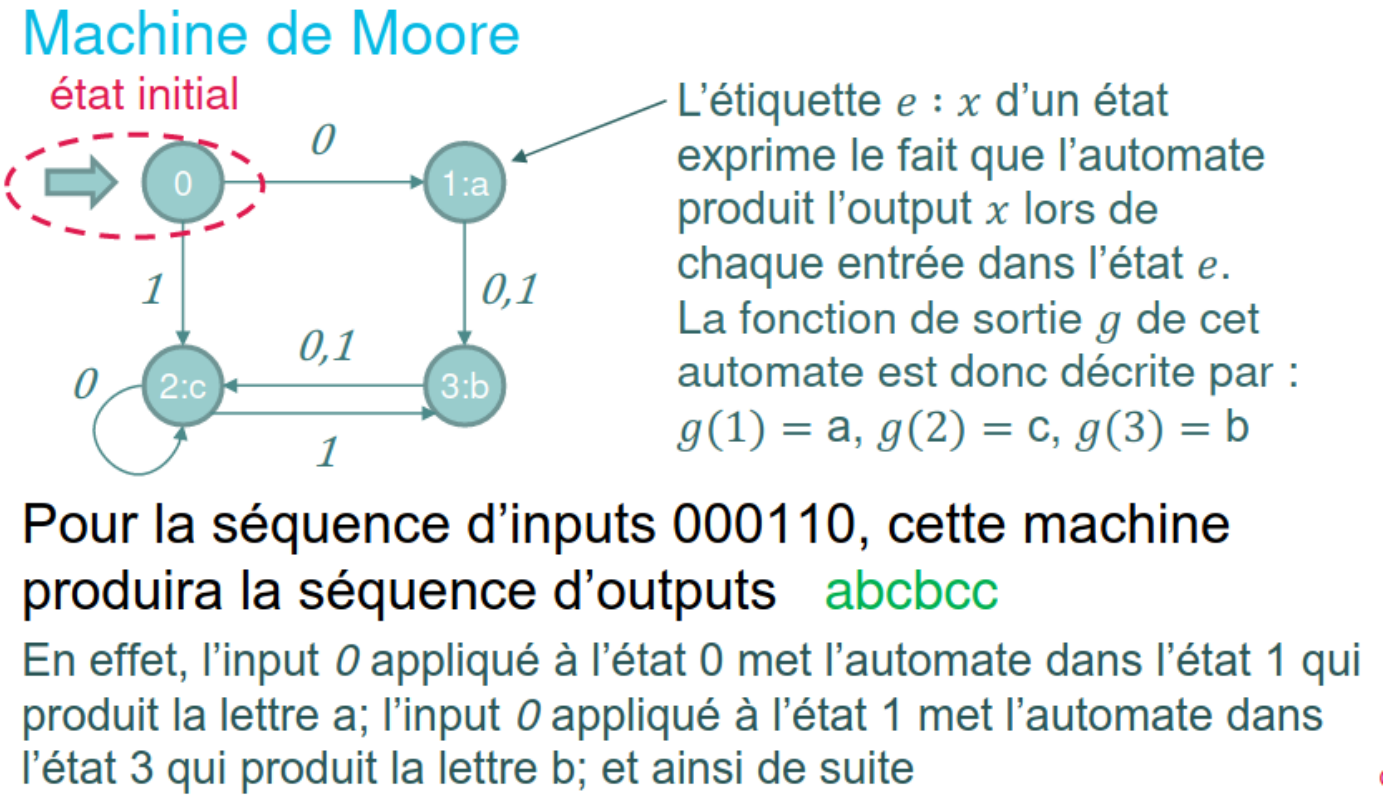
Un état e après l'ajout d'un input i deviendra $t(e,i)$. Un diagramme d'état d'un automate fini sera représenter comme ceci :

Machines de Moore et machines de Mealy

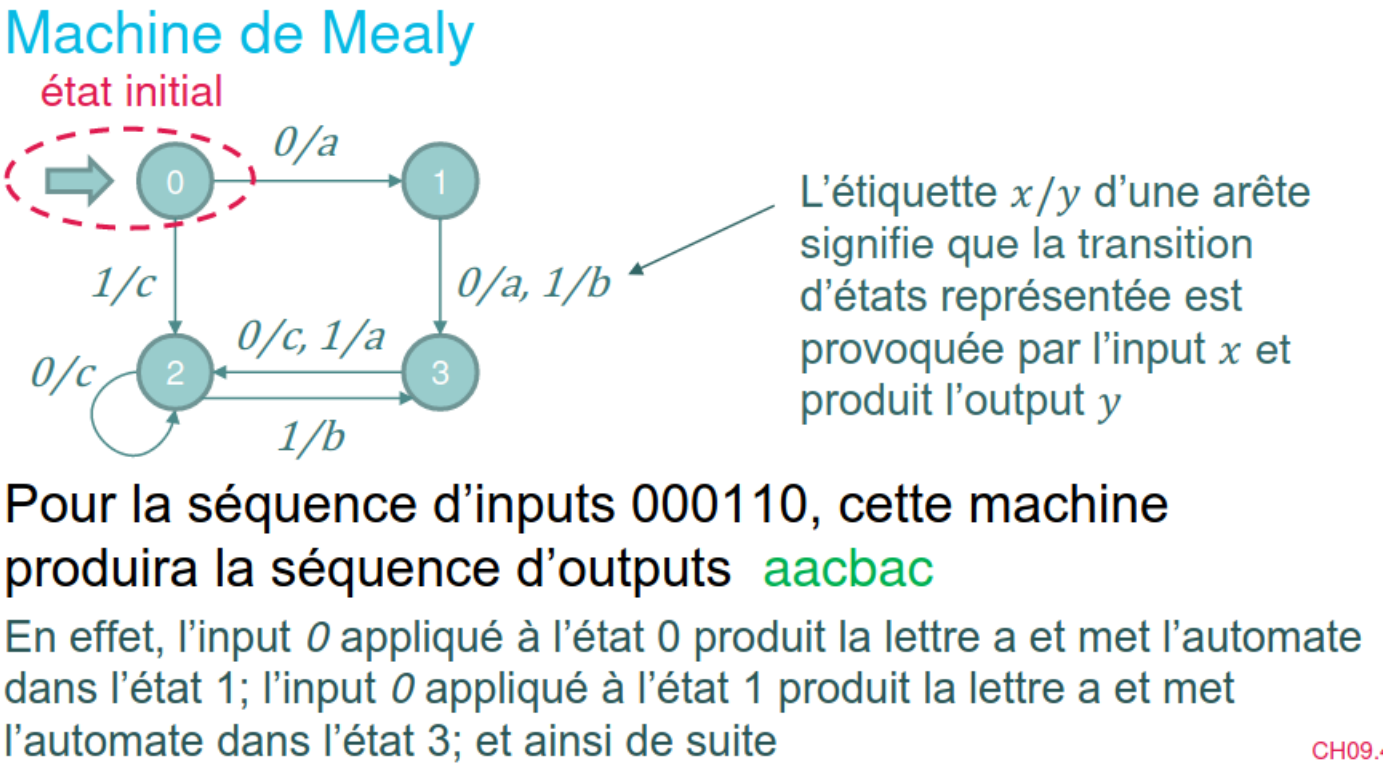
Les automates précédents ne servent pas à grand-chose, car ils ne produisent rien. Contrairement aux automates précédents, ceux-ci ont un état initial et une séquence d'output.

Les machines de Moore et de Mealy sont différentiées par ce qui détermine l'output :

- Dans une **machine de Moore**, la sortie est déterminée par l'état après la transition



- Dans une **machine de Mealy**, la sortie est déterminée par la transition elle-même



Les machines de Moore et Mealy sont des machines **séquentielles** qui transforment une suite (input) en une autre suite (outputs). Une machine de Moore est toujours un cas particulier de machine de Mealy et inversement une machine de Mealy a toujours une machine de Moore équivalente.

Machines de reconnaissance

Maintenant, on va s'intéresser à un type particulier de machine de Moore, les machines de reconnaissances. Elles ont comme seuls outputs 0 et 1. 0 si l'input n'est pas reconnu et 1 s'il l'est.

Par convention, un état non reconnu sera un simple rond, et un état reconnu (aussi appelé état d'acceptation) sera un double rond.

Cette machine va donc servir à vérifier si une séquence donnée mène ou non à un état d'acceptation.

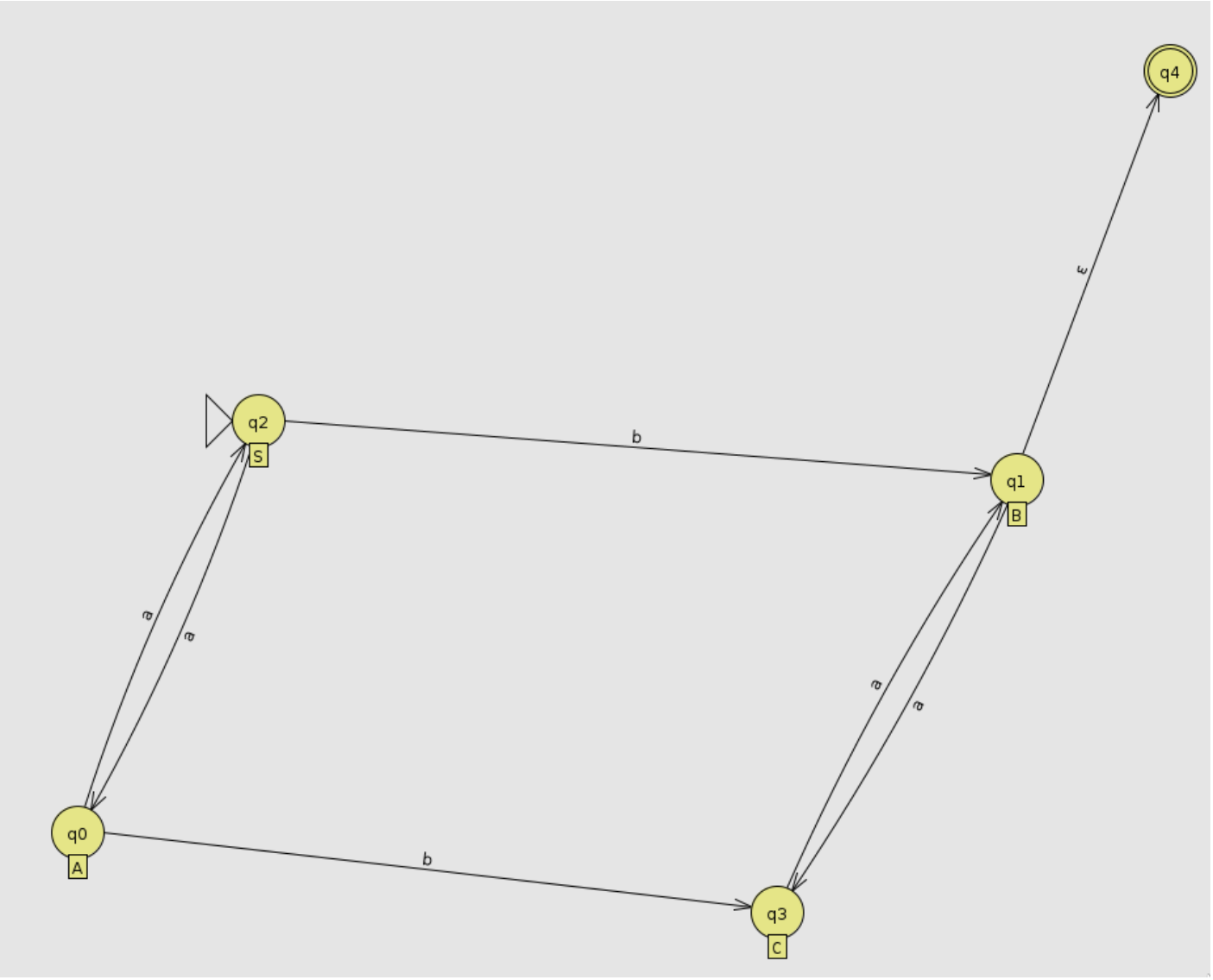
Cet automate de Moore va être défini par le quintuplet $M = (E, \Sigma, t, e_0, A)$ où E est l'ensemble fini d'états, Σ est l'ensemble des inputs (tel que l'alphabet dans le cas des langages formels), t est la fonction de transition d'un état à l'autre, e_0 est l'état initial et A est l'ensemble des états d'acceptations.

Dans le cadre des langages formels, tous les langages reconnus par une machine de Moore seront des grammaires de type 3 (langage régulier). Et on peut créer un automate à partir d'une grammaire ou une grammaire à partir d'un automate.

Comme vu à la page précédente, une grammaire d'un langage peut être définie comme étant $G = (\Sigma, N,P,S)$ où :

- Σ est l'alphabet (c'est-à-dire les inputs)
- N l'ensemble des symboles non-terminaux (c'est-à-dire les états)
- P sont les productions de la grammaire (l'équivalent des transitions entre les états)
- S le symbole non terminal de départ (soit l'état initial)

Voici un automate représentant une grammaire (de type 3, soit régulière) avec la règle suivante "tout mot avec un nombre pair de `a` et strictement 1 `b` "



Ici q4 est un état final, mais cet état aurait très bien pu être q1 (soit B)

Dans cet automate, les états S, A, B, C correspondent respectivement à :

- S = nombre pair de `a` et aucun `b`
- A = nombre impair de `a` et aucun `b`
- B = nombre pair de `a` et 1 seul `b`
- C = nombre impair de `a` et 1 seul `b`

Donc on démarre dans l'état S, car il y a 0 `a` et 0 est un nombre pair, si on ajoute un `a` on passe dans B parce qu'il y a un nombre impair de `a` si on rajoute un `a` on repasse en S parce qu'il y a de nouveau un nombre pair de `a`. Si on ajoute un `b` on passera alors dans l'état B ou C dépendant de l'état d'origine.

Cet automate peut simplement être converti en la grammaire suivante $G = (\{a, b\}, \{ S, A, B, C \}, P, S)$ dont voici les règles de production P :

```
S → aA
S → bB
A → aS
A → bC
B → aC
B → ε
C → aB
```

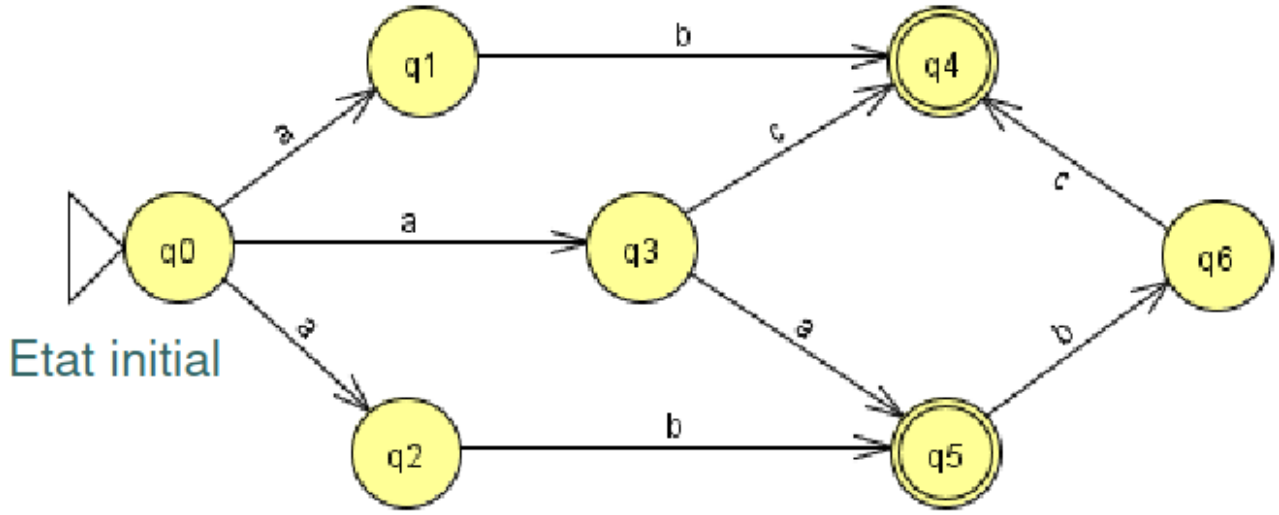
Les automates déterministes et non déterministes

Un automate est dit **déterministe** si depuis un certain input et un certain état actuel, il y a une seule transition possible.

Et il est dit **non déterministe** si depuis un certain input et un certain état actuel, il y a plusieurs transitions possibles ou aucune.

Il est parfaitement possible de faire des automates non déterministes, et il existe un algorithme simple qui permet de convertir un automate non déterministe en automate déterministe.

Pour le convertir, il suffit de faire un tableau de toutes les transitions et de regrouper les états, par exemple en partant de l'automate non déterministe suivant :



> Pro tip: On peut utiliser JFLAP pour convertir un NFA en DFA, pour cela il faut aller dans "Finite automation", créer l'automate puis cliquer sur Convert puis sur "Convert to DFA" puis enfin sur "Complete". On peut aussi tester l'équivalence entre 2 FA (finite automation) en créant un nouveau FA puis en allant dans "Test" puis dans "Test equivalence"

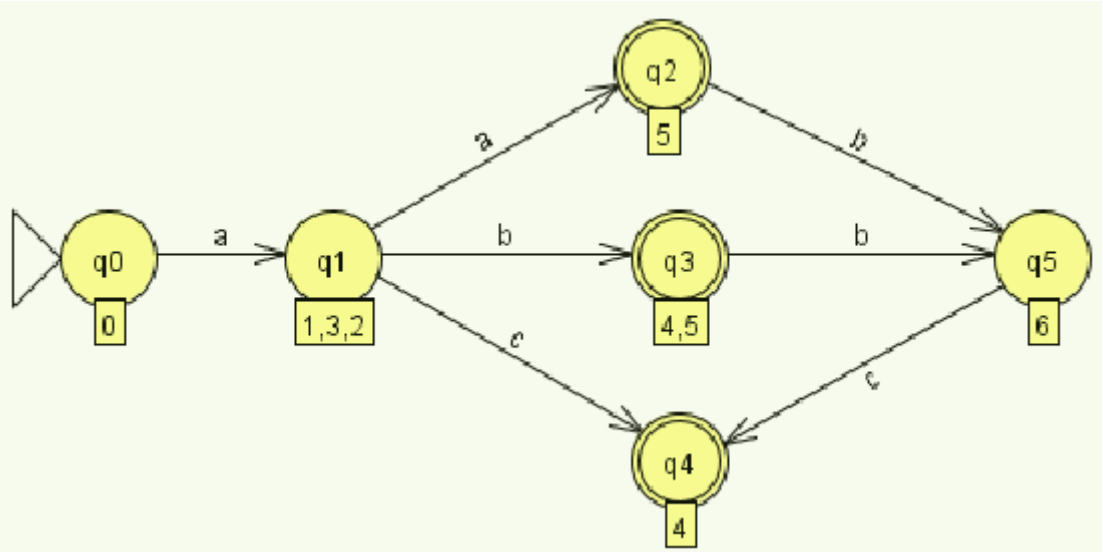
On peut ensuite construire un tableau de toutes les transitions possibles pour chaque input à partir de l'état initial (à noter les états en gras sont les états d'acceptation)

Etats	a	b	c
0 (initial)	1,3,2	∅	∅

Ensuite on peut ajouter pour chaque nouvel état (ou groupe d'états) les transitions correspondantes :

Etats	a	b	c
0 (initial)	1,3,2	∅	∅
1,3,2	5	**4,5**	**4**
5	∅	6	∅
4,5	∅	6	∅
4	∅	∅	∅
6	∅	∅	**4**

On peut ensuite construire le nouvel automate :



Si on veut créer un automate **fini et complet**, on peut alors ajouter un nouvel état "P" (poubelle) dans lequel on va ajouter tous les inputs qui ne mènent à rien (∅ dans le tableau)

À savoir que cet algorithme n'est pas optimisé, il y a des techniques pour l'optimiser, mais on n'en parlera pas ici.

Revision #11
Created 26 May 2023 13:02:37 by SnowCode
Updated 30 May 2023 09:02:33 by SnowCode